

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

معادله برنولی

دکتر احمد نیک پی
عضو هیات علمی دانشگاه علوم پزشکی قزوین
گروه بهداشت حرفه ای
تاریخ انتشار پاییز ۱۳۹۲
نگارش اول
nikpey@gmail.com

منبع

- مکانیک سیالات کاربردی: راجرز کنسکی، فصل پنجم
- مکانیک سیالات با کاربردهای مهندسی: ئی جان فینه مور، فصل هشتم

اهداف آموزشی

- آشنایی با سیال ایده آل
- آشنایی با انرژی های فشاری سیستم
- آشنایی با معادله برنولی
- آشنایی با کاربردهای معادله برنولی
- آشنایی با تئوری تریچلی

سیال ایده آل

- سیال ایده ال تراکم ناپذیر و فاقد ویسکوزیته است بنابراین:
- چون سیال تراکم ناپذیر است جرم حجمی و وزن سیال و به طور کلی انبساط و انقباض سیال همراه با تبادل انرژی نیست.
- چون سیال ویسکوزیته ندارد، اصطکاکی نداشته و الگوی سرعت در مقطع جریان یکسان است.
- با توجه به ثابت بودن جرم حجمی و ویسکوزیته سیال، انرژی داخلی سیال در راستای جریان در مقاطع مختلف ثابت و بدون تغییر است.

در سیال ایده آل:

- انرژی از حالتی به حالت دیگر تبدیل می شود،
- محتوی یا انرژی کل در نقاط مختلف با یکدیگر برابر هستند.

انرژی های یک سیستم سیالاتی

- انرژی جنبشی
- انرژی پتانسیل
- انرژی فشاری
- انرژی درونی
- انرژی کل

انرژی جنبشی

$$K_E = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{K_E}{\text{وزن}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{w} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\gamma \cdot V} = \frac{\frac{1}{2}\rho V v^2}{\rho g \cdot V} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g}$$

$$\frac{K_E}{\text{جرم}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{m} = \frac{v^2}{2}$$

$$\frac{K_E}{\text{حجم}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{V} = \frac{\frac{1}{2}\rho V v^2}{V} = \frac{\rho v^2}{2} \quad \frac{K_E}{\text{وزن}} = \alpha \frac{v^2}{2g}$$

α : در جریان لامینار ۲ و در جریان آشفتنه ۱,۰۱ - ۱,۱۵

انرژی پتانسیل جریان

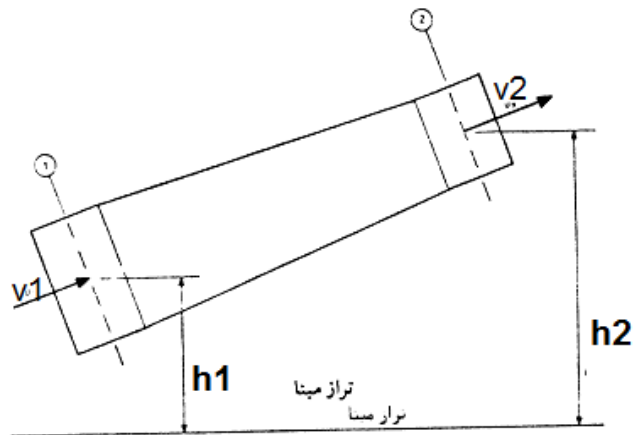
$$P_E = mgh$$

در سرعت ثابت با افزایش ارتفاع سیال بر انرژی پتانسیل جریان افزوده شده و به همان مقدار از انرژی فشاری جریان کاسته می شود.

انرژی فشاری جریان

$$F = P.A \text{ و } W = F.d \rightarrow W = P.A.d \rightarrow W = P.V \rightarrow W = \frac{Pm}{\rho}$$

انرژی کل سیال



$$PE_1 + KE_1 + h_1 = PE_2 + KE_2 + h_2$$

معادله اوایلر - برنولی

$$\frac{dP}{\gamma} + d\frac{v^2}{2g} + dz = 0$$

$$\frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z = cte$$

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = cte$$

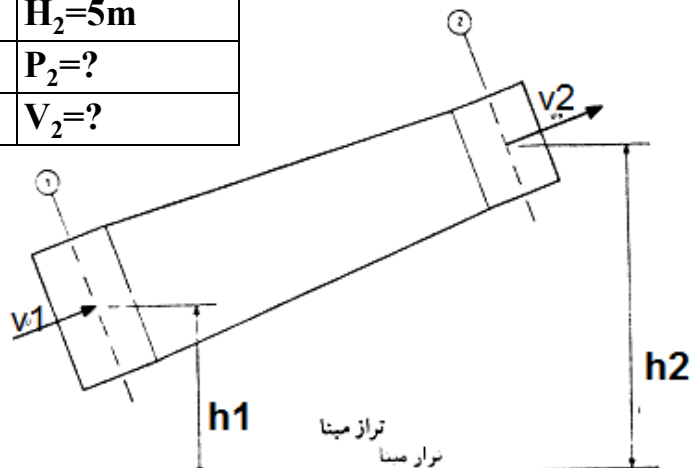
معادله برنولی: با ضرب در g

$$P + \frac{\rho v^2}{2} + gz = cte$$

معادله برنولی: با ضرب در ρ

آب در لوله ای شیب دار با سطح مقطع متغیر و با مشخصات زیر در جریان است. انرژی سرعت و انرژی فشاری جریان در نقطه ۲ را محاسبه و نمایش معادله برنولی را به صورت نمودار ارائه کنید؟

$D_1=500\text{mm}$	$D_2=440\text{mm}$
$H_1=3\text{m}$	$H_2=5\text{m}$
$P_1=45\text{kpa}$	$P_2=?$
$V_1=5.6\text{m/s}$	$V_2=?$



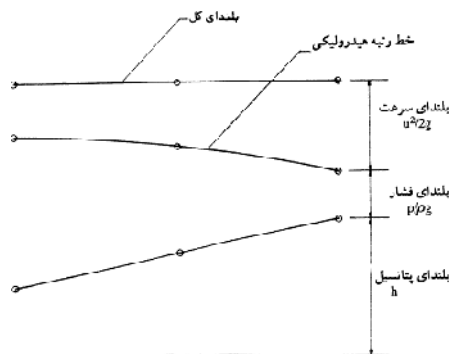
بر اساس معادله پیوستگی سرعت جریان را در سطح ۲ تعیین می کنیم.

$$A_1 \times V_1 = A_2 \times V_2 \rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 = \frac{5.6\text{m}}{\text{se}} \times \left(\frac{500\text{mm}}{440\text{mm}} \right)^2 = 7.23\text{m/s}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

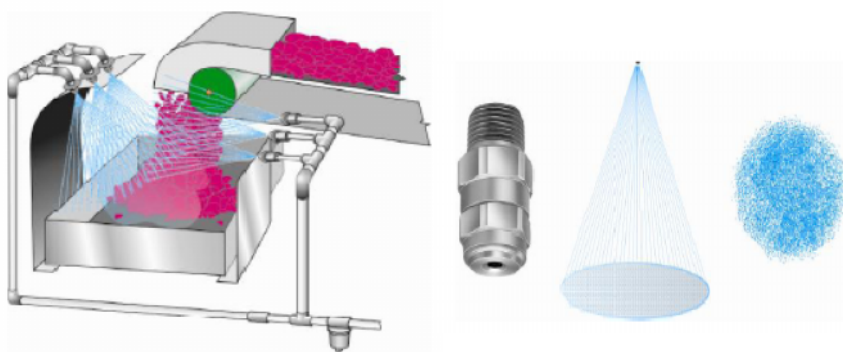
$$\frac{45 \times 10^3}{10^3 \times 9.81} + \frac{5.6^2}{2 \times 9.81} + 3 = \frac{P_2}{10^3 \times 9.81} + \frac{7.23^2}{2 \times 9.81} + 5 \rightarrow P_2 = 14.9 \times 10^3 \text{pa} = 14.9\text{KPa}$$

نمایش فشارهای سیستم در قالب نمودار



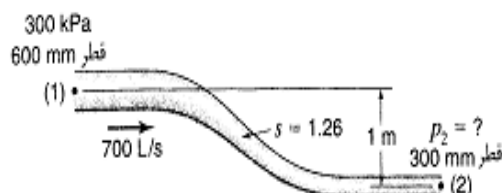
۲	۱	بلندای فشار (متر)
۵	۳	بلندای پتانسیل (ارتفاع)
۵۲/۱	۵۹/۴	بلندای استاتیک
۶۷/۲	۶/۱	بلندای سرعت
۱۹/۹	۱۹/۹	بلندای کل

در یک دستگاه اسکرابر قصد داریم سیالی با دانسیته نسبی ۰/۹ را از لوله ای عمودی به ارتفاع ۳/۵ متر با سرعت ۵ متر بر ثانیه انتقال داده و در فشار ۳۰ کیلو پاسکال (۰.۳ بار از سرنازل موجود در انتهای لوله خارج شود. فشار کلی جریان را در نقطه خروجی تعیین کنید؟



$h_p = \frac{P}{\rho g} = \frac{30 \times 10^3}{0.9 \times 10^3 \times 9.81} = 3.4 \text{ m}$	هد فشار
$K_E = \frac{v^2}{2} = \frac{5^2}{2 \times 9.81} = 1.27 \text{ m}$	هد سرعت
$h=3.5 \text{ m}$	هد ارتفاع
$H=3.4+1.27+3.5=8.17 \text{ m}$	هد کل

گلیسرین با دانسیته نسبی ۱/۲۶ در لوله ای به قطر ۶۰۰ میلی متر با دبی ۷۰۰ لیتر در ثانیه در حرکت است. در نقطه ای دیگری از مسیر به قطر ۳۰۰ میلی متر که یک متر پایین تر از نقطه اول است، فشار را محاسبه کنید؟ از افت فشار در مسیر صرف نظر می شود.



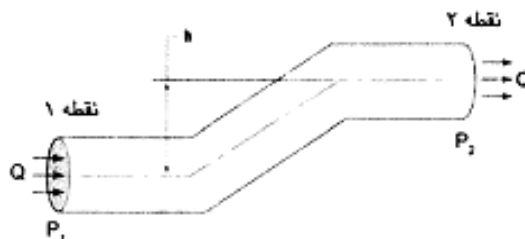
وزن مخصوص آب 9810 N/m^3 یا 9.81 kN/m^3

$$v_1 = \frac{0.7 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0.3)^2 \text{ m}^2} = 2.48 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 4v_1 = 9.90 \text{ m/s}$$

$$\frac{300}{1.26(9.81)} + \frac{v^2}{2(9.81)} + 0 = \frac{P_2}{1.26(9.81)} + \frac{(9.90)^2}{2(9.81)} - 1 \rightarrow P_2 = \frac{254 \text{ kN}}{\text{m}^2} = 254 \text{ Kpa}$$

سیالی با وزن مخصوص 8800 نیوتن بر متر مکعب با دبی 10 لیتر در دقیقه در مسیری در جریان است. اگر سطح مقطع مسیر در نقاط یک و دو برابر باشد، فشار در نقطه یک، 700 کیلو پاسکال و ارتفاع h معادل 5 متر باشد فشار را در نقطه ۲ تعیین کنید.

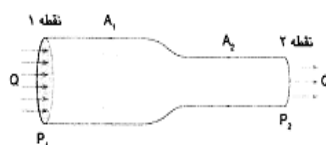


$$\frac{P_1}{\gamma} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + h_2$$

$$(P_2 - P_1) = \gamma(h_2 - h_1) \rightarrow P_2 - 700.000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 8800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} (5\text{m}) = 656 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = (656\text{Kpa})$$

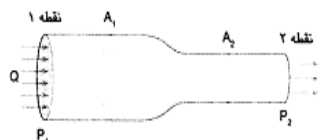
برای بالا بردن سیال به ارتفاع ۵ متر نیاز به ۶۵۶ کیلو پاسکال یا ۶/۵ بار فشار است.

سیالی با وزن مخصوص ۸۸۰۰ نیوتن بر متر مکعب با جریان ۰/۰۰۵ متر مکعب در ثانیه در مسیری در حرکت است. سطح مقطع مسیر در نقاط یک و دو به ترتیب $A_1=0.002\text{m}^2$ و $A_2=0.001\text{m}^2$ است. اگر فشار در نقطه یک، ۱۰۰۰ کیلوپاسکال باشد فشار در نقطه ۲ را تعیین کنید؟



$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.005 \frac{m^3}{s}}{0.002m^2} = 2.5m/s$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.005 \frac{m^3}{s}}{0.001m^2} = 5m/s$$



$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \rightarrow P_2 = P_1 + \frac{\gamma}{2g} (V_1^2 - V_2^2)$$

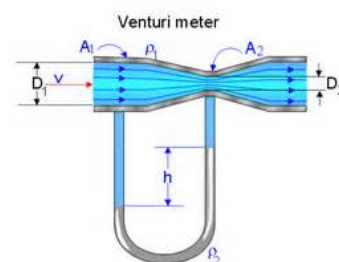
$$P_2 = 100.000 \frac{N}{m^2} + \frac{8800 \frac{N}{m^3}}{2 \left(\frac{9.81m}{s^2} \right)} ((2.5m/s)^2 - (5m/s)^2) = 991600 \frac{N}{m^2} (991Kpa)$$

یک لوله ونتوری با گلوگاهی به قطر ۵۰ میلی متر در خط افقی جریان آب به قطر ۷۵ میلی متر قرار دارد. اگر فشار در بالا دست ونتوری ۴۵ کیلوپاسکال و سرعت ۴ متر بر ثانیه باشد سرعت و فشار را در گلوگاه ونتوری با فرض جریان سیال ایده آل محاسبه کنید؟

$$v_2 = 4 \times \left(\frac{75}{50}\right)^2 = 9m/s$$

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + h_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + h_2$$

$$\frac{45 \times 10^3}{10^3} + \frac{4^2}{2} = \frac{P_2}{10^3} + \frac{9^2}{2} \rightarrow P = 12.5 \times 10^3 pa = 12.5 KPa$$



در لوله شیب داری با زاویه ۳ درجه نسبت به سطح افق، سیال نفت با دانسیته نسبی ۰/۹ به سمت بالا جابجا می شود. فشار لوله در نقطه ای از مسیر ۹۰ کیلو پاسکال است. فشار لوله را در ۱۰۰ متر بالاتر از این نقطه محاسبه کنید؟

$$H = x \sin \phi \quad h = 100 \sin 3 \quad h = 5.23 \text{ m}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2} + h_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2} + h_2$$

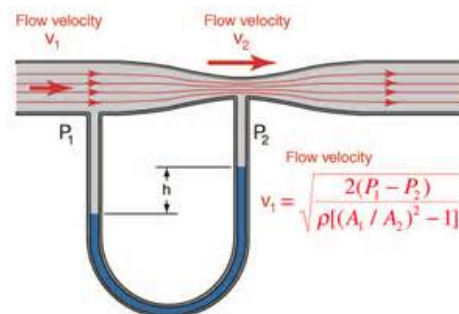
$$\frac{90 \times 10^3}{900 \times 9.81} + 0 = \frac{P_2}{900 \times 9.81} + 5.23 \text{ m} \rightarrow P_2 = 43.7 \times 10^3 \text{ pa} = 43.7 \text{ KPa}$$

ونتوری

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_1 = V_2 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (P_1 - P_2)}{\gamma \cdot \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$



سیالی با وزن مخصوص ۸۸۰۰ نیوتن بر متر مکعب با جریان ثابت از یک دستگاه ونتوری عبور می کند. سطح جریان به ترتیب $A_1=0.002$, $A_2=0.001m^2$ می باشند. اگر فشارهای سیستم به ترتیب $P_1=900$, $P_2=800$ Kpa باشد، جریان عبوری از سیستم را بر حسب لیتر بر دقیقه محاسبه کنید؟

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(\frac{9.81m}{s^2}\right) (100000N/m^2)}{8800N \cdot m^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{0.001m^2}{0.002m^2}\right)\right]}} = 21.12m/s$$

$$Q=V_2 \cdot A_2=21.12m/s(0.001m^2)=0.021 m^3/se$$

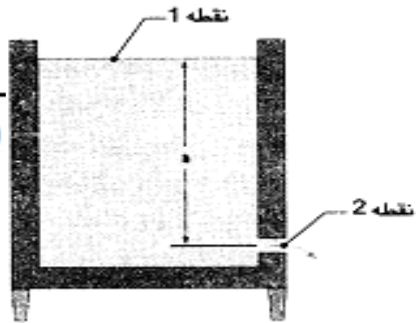
$$0.021m^3/se (60_s/1_{min}) (1000_l/m^3)=1267l/min$$

$$h_1 = h_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot g(h_1 - h_2)}$$

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot gh}$$

تئوری توریچلی

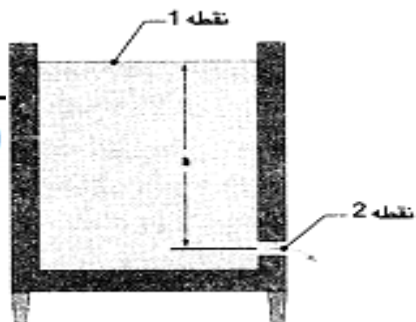


$$h_1 = h_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot g(h_1 - h_2)}$$

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot gh}$$

تئوری توریچلی



مخزنی تا ارتفاع ۳ متر از مایعی پر شده است. سرعت خروج مایع را از دریچه پایین مخزن محاسبه کنید.

$$V_2 = \sqrt{2 \left(\frac{9.81m}{se^2} \right) \cdot 3m} = \frac{7.67m}{se}$$

متشکرم